**Απειροστικός Λογισμός Ι, 15/2/2024** Διδάσκων: Α. Τόλιας

**Θέμα 1. [2,5 μον.]**
α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών.

β) Δίνεται ένας θετικός πραγματικός αριθμός $M$. Να δείξετε ότι για την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = \sqrt[n]{M}$ ισχύει $a_n \to 1$.

γ) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω ακολουθίες

$$a_n = \frac{8\cdot 6^n + 17\cdot 5^n}{5\cdot 3^n + 4\cdot 6^n} \qquad \beta_n = \sin(\frac{n\pi}{3}) \qquad \gamma_n = \frac{10^n}{n!}$$

**Θέμα 2. [1,5 μον.]**
α) Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού, ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x+15}$, $x > 0$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 10$.

β) Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0$ και η συνάρτηση $g$ να είναι φραγμένη, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 4} f(x)g(x) = 0$.

**Θέμα 3. [1,5 μον.]**
Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2023^{2025}$ και $2024^{2024}$. [Υπόδειξη: Να γράψετε ισοδύναμα τη σύγκριση αυτή ως $f(a) < f(\beta)$ για κατάλληλα $a, \beta$ και συνάρτηση $f$ που θα ορίσετε εσείς και στη συνέχεια να μελετήσετε (σε διάστημα που να περιέχει τα $a, \beta$) τη μονοτονία της $f$ ώστε να καταλήξετε στο τελικό συμπέρασμα.]

**Θέμα 4. [2 μον.]**
Δίνεται μια συνάρτηση $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και ισχύει

$$e^{5x} = 1 + f(x)\sin x$$

για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$ και να δείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη, υπολογίζοντας την παράγωγό της σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. (Υπόδειξη: Για $x \neq 0$ χρησιμοποιήστε τους κανόνες παραγώγισης. Για $x = 0$ χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου. Αφού κάνετε πράξεις, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε στη συνέχεια τον κανόνα De L' Hospital δύο φορές για το όριο που θα προκύψει, ελέγχοντας τις συνθήκες που απαιτούνται.)

**Θέμα 5. [2 μον.]**
Έστω $A, B$ δύο σύνολα για τα οποία ισχύουν τα εξής:
(i) $A \subseteq (-\infty, 2)$ και $B \subseteq (5, +\infty)$.
(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$ και $y \in B$ ώστε $y - x < 3 + \varepsilon$.

Να δειχθεί ότι $\sup A = 2$ και $\inf B = 5$.

**Θέμα 6. [2 μον.]** Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ ώστε $f(a) = 0 = f(\beta)$. Θεωρούμε επίσης έναν αριθμό $\gamma$ με $\gamma \in (-\infty, a) \cup (\beta, +\infty)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $g : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{x-\gamma}$.
(α) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $g'(\xi) = 0$.
(β) Για το σημείο $\xi$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $(\gamma, 0)$.

**Καλή επιτυχία!**